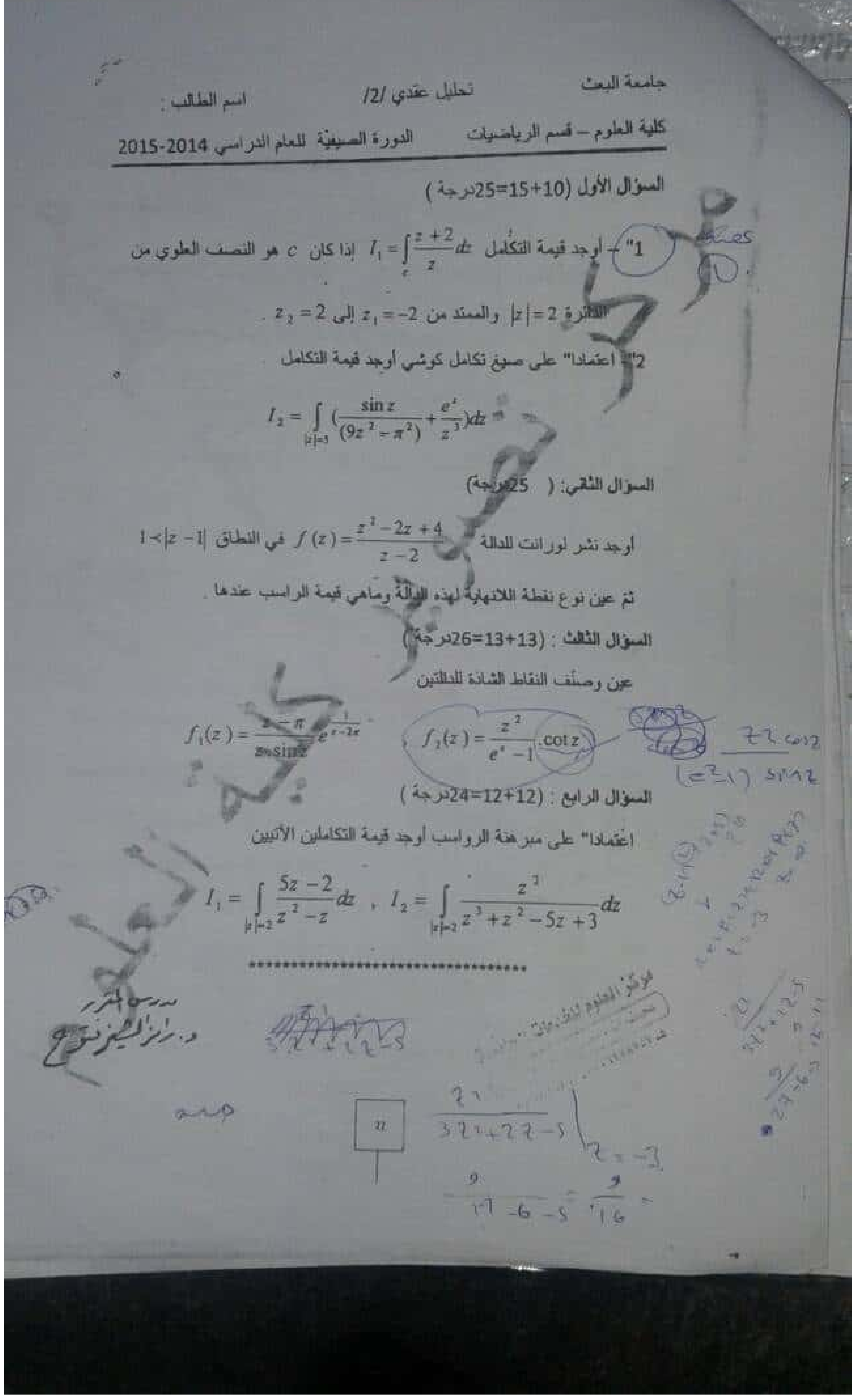


جامعة البعث — تحليل عقدي /2/ — اسم الطالب :

كلية العلوم – قسم الرياضيات — الدورة الصيفية للعام الدراسي 2014-2015

السؤال الأول (10+15=25درجة)

"1- أوجد قيمة التكامل $I_1=\int_c \frac{z+2}{z}dz$ إذا كان c هو النصف العلوي من الدائرة $|z|=2$ والممتد من $z_1=-2$ إلى $z_2=2$.

"2- اعتماداً على صيغ تكامل كوشي أوجد قيمة التكامل

$$I_2=\int_{|z|=3}\left(\frac{\sin z}{(9z^2-\pi^2)}+\frac{e^z}{z^3}\right)dz$$

السؤال الثاني: (25درجة)

أوجد نشر لورانت للدالة $f(z)=\frac{z^2-2z+4}{z-2}$ في النطاق $1<|z-1|$

ثم عين نوع نقطة اللانهاية لهذه الدالة وماهي قيمة الراسب عندها .

السؤال الثالث : (13+13=26درجة)

عين وصنّف النقاط الشاذة للدالتين

$$f_1(z)=\frac{z-\pi}{z\sin z}e^{\frac{1}{z-2\pi}} \qquad f_2(z)=\frac{z^2}{e^z-1}\cot z$$

السؤال الرابع : (12+12=24درجة)

اعتماداً على مبرهنة الرواسب أوجد قيمة التكاملين الآتيين

$$I_1=\int_{|z|=2}\frac{5z-2}{z^2-z}dz \quad , \quad I_2=\int_{|z|=2}\frac{z^2}{z^3+z^2-5z+3}dz$$

****

مدرس المقرر

د. رازي الشيخ نوح

الإجابات النموذجية لمادة التحليل العقدي /2/ مع سلم الدرجات

جواب السؤال الأول: $25 = 15 + 10$

لإيجاد قيمة التكامل تعتمد على العلاقة $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$ 1

معادلة الكفاف المعطى هي $-\pi < t < 0$ ، $z(t) = 2e^{-it} \Leftarrow z'(t) = -2ie^{-it}$ 1 + 1

ومنه أن $f(z(t)) = \frac{2e^{-it}+2}{2e^{-it}}$ بالتعويض في العلاقة الأولى نجد أن 1

$$\int_{z=-2}^{z=2} \frac{z+2}{z}dz = \int_{-\pi}^{0} \frac{2e^{-it}+2}{2e^{-it}}(-2ie^{-it})dt = -2i\int_{-\pi}^{0}(e^{-it}+1)dt =$$ 1 + 2

$$= -2i(\frac{1}{-i}e^{-it}+t)_{t=-\pi}^{t=0} = -2i(\frac{1}{-i}+0)+2i(\frac{1}{-i}(-1)-\pi) = 4-2i\pi$$ 1 + 1 + 1

(2) (15)

$$I_2 = \int_{|z|=1} \frac{\sin z}{9z^2-\pi^2}dz + \int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^3}dz = \frac{1}{9}\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{3})(z+\frac{\pi}{3})}dz + \int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^3}dz$$ 1 + 1

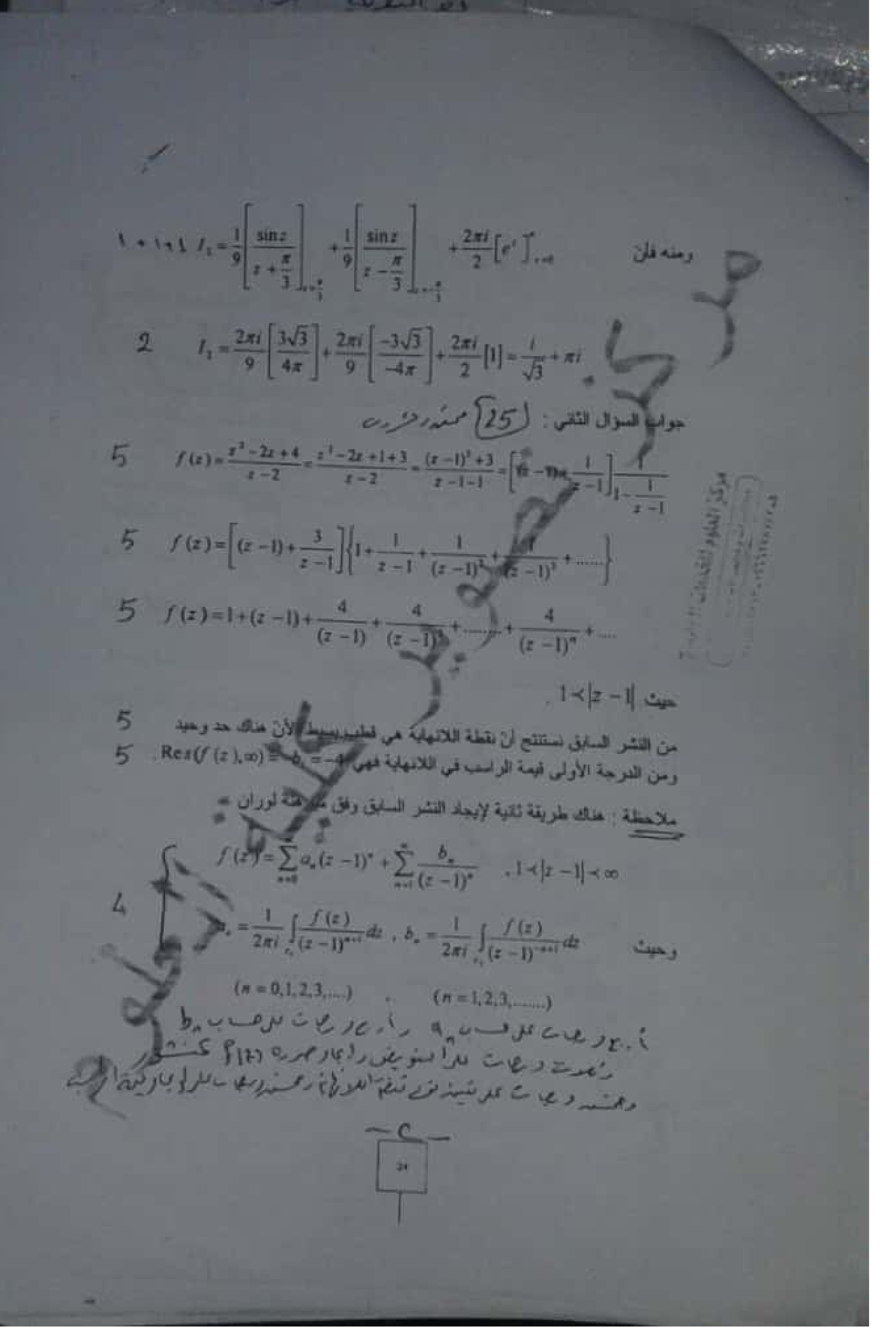
النقاط الشاذة هي $z = 0$ ، $z_2 = -\frac{\pi}{3}$ ، $z_1 = \frac{\pi}{3}$ جميع هذه النقاط تقع في 1 + 1 + 1

داخلية الكفاف المعطى لذلك نحيط z_1 بدائرة c_1 كما نحيط z_2 بدائرة c_2

بحيث أن $c \cap c_2 = \phi$ ، $c \cap c_1 = \phi$ ، $c_1 \cap c_2 = \phi$ عندئذ حسب مبرهنة كوشي 2

جورسات للمناطق المتعددة الترابط يكون

$$I_2 = \frac{1}{9}\int_{c_1} \frac{\frac{\sin z}{z+\frac{\pi}{3}}}{z-\frac{\pi}{3}}dz + \frac{1}{9}\int_{c_2} \frac{\frac{\sin z}{z-\frac{\pi}{3}}}{z+\frac{\pi}{3}}dz + \int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^3}dz$$ 1 + 1 + 1



ومنه فإن $I_2 = \frac{1}{9}\left[\frac{\sin z}{z+\frac{\pi}{3}}\right]_{z=\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{9}\left[\frac{\sin z}{z-\frac{\pi}{3}}\right]_{z=-\frac{\pi}{3}} + \frac{2\pi i}{2}\left[e^{z}\right]_{z=0}$ ١٠+١+١

2 $I_2 = \frac{2\pi i}{9}\left[\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right] + \frac{2\pi i}{9}\left[\frac{-3\sqrt{3}}{-4\pi}\right] + \frac{2\pi i}{2}[1] = \frac{i}{\sqrt{3}} + \pi i$

جواب السؤال الثاني : {25} درجة

5 $f(z) = \frac{z^2-2z+4}{z-2} = \frac{z^2-2z+1+3}{z-2} = \frac{(z-1)^2+3}{z-1-1} = \left[(z-1)+\frac{3}{z-1}\right]\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}}$

5 $f(z) = \left[(z-1)+\frac{3}{z-1}\right]\left\{1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^3}+\dots\right\}$

5 $f(z) = 1+(z-1)+\frac{4}{(z-1)}+\frac{4}{(z-1)^2}+\dots+\frac{4}{(z-1)^n}+\dots$

حيث $1<|z-1|$.

5 من النشر السابق نستنتج أن نقطة اللانهاية هي قطب بسيط لأن هناك حد وحيد

5 ومن الدرجة الأولى قيمة الراسب في اللانهاية فهي $Res(f(z),\infty) = -b_1 = -4$.

ملاحظة : هناك طريقة ثانية لإيجاد النشر السابق وفق متسلسلة لوران :

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-1)^n} \quad , 1<|z-1|<\infty$

4 وحيث $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} \frac{f(z)}{(z-1)^{n+1}}dz \;,\; b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} \frac{f(z)}{(z-1)^{-n+1}}dz$

$(n=0,1,2,3,\dots)$, $(n=1,2,3,\dots)$

جواب السؤال الثالث : 26 = 13 + 13

2 النقاط الشاذة للدالة $f_1(z)$ هي جذور المعادلة $z-2\pi=0$ ، $z.\sin z=0$

أي $z=2\pi$ ، $z=n\pi$ $(n=0,\pm1,\pm2,\pm3,.....)$ ، $z=0$

3 من أجل $n=0$ تكون النقطة $z=0$ هي نقطة شاذة وبما أنها صفر من الدرجة الثانية للمقام ولا تعدم البسط فإنّ $z=0$ هي قطب من الرتبة الثانية للدالة $f_1(z)$

3 من أجل $n=1$ تكون النقطة $z=\pi$ هي نقطة شاذة للدالة وبما أنها صفر للمقام من الدرجة الأولى وكذلك صفر للبسط من الدرجة الأولى إذاً $z=0$ هي نقطة شاذة قابلة للأصلاح .

3 أما من أجل $n=2$ فإنّ النقطة $z=2\pi$ هي نقطة شاذة للدالة $f_1(z)$ وبما أنّ

$\lim_{z\to2} f_1(z)$ غير موجودة فإنّ النقطة $z=2\pi$ هي نقطة شاذة أساسية

2 أما من أجل $n=-1,-2,\pm3,\pm4,..$ فإنّ النقاط $z=n\pi$ فهي أقطاب بسيطة لأنها أصفار من الدرجة الأولى للمقام .

1 النقاط الشاذة للدالة $f_2(z)$ فهي جذور المعادلة $(e^z-1)\sin z=0$ ومنه فإنّ

3 أما $e^z-1=0 \Leftarrow e^z=1 \Leftarrow z=2n\pi i$ $n=0,\pm1,\pm2,...$

3 وإما $\sin z=0 \Leftarrow z=n\pi$ $n=0,\pm1,\pm2,...$

4 ونلاحظ أنه من أجل $n=0$ فإنّ النقطة $z=0$ هي نقطة شاذة للدالة $f_2(z)$ وبما أنها صفر من الدرجة الثانية للمقام وكذلك صفر من الدرجة الثانية للبسط إذاً"

2 $z=0$ هي نقطة شاذة قابلة للاصلاح أما باقي النقاط الشاذة فهي أقطاب بسيطة

جواب السؤال الرابع : 24 = 12 + 12

2+2 $I_1 = 2\pi i\,(\mathrm{Res}(f(z),0) + \mathrm{Res}(f(z),1))$

3+3 $\mathrm{Res}(f(z),0) = -2 \quad \mathrm{Res}(f(z),1) = 3$

2 ومنه فإن $I_1 = 2\pi i(-2+3) = 2\pi i$

2 حيث $I_2 = 2\pi i b_1$ $b_1 = \mathrm{Res}(f(z),1)$ أو اعتماداً على العلاقة

2 $\mathrm{Res}(f(z),1) + \mathrm{Res}(f(z),-3) + \mathrm{Res}(f(z),\infty) = 0$

2 نجد أن $\mathrm{Res}(f(z),1) = -\mathrm{Res}(f(z),-3) - \mathrm{Res}(f(z),\infty)$

2 وبما أن $\mathrm{Res}(f(z),\infty) = 0$ لأن نقطة اللانهاية صفر من الدرجة

2 الثالثة وكذلك بما أن $\mathrm{Res}(f(z),-3) = \frac{1}{16}$ عندئذ يكون

2 أي أن $\mathrm{Res}(f(z),1) = -\frac{1}{16}$ و $I_2 = -\frac{\pi i}{8}$ وهو المطلوب .

4+2 أو $I_2 = 2\pi i b_1$ حيث $b_1 = \frac{1}{(2-1)!}.\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}(z-1)^2.\frac{1}{(z-1)^2.(z+3)}$

2+4 ومنه فإن $b_1 = \lim_{z\to 1} -\frac{1}{(z+3)^2} = -\frac{1}{16}$ أي أن $I_2 = 2\pi i(-\frac{1}{16}) = -\frac{\pi i}{8}$.